

O CORPO DOS NÚMEROS REAIS, R , É COMPLETO EM QUE SENTIDO?

Camila Lopes Montezor. Profa. Dra. Nativy Viana Pereira Bertolo - Matemática - Departamento de Matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas - Campus de Rio Claro.

O conjunto dos números reais, $R = (R, +, \times, <)$ é um corpo ordenado completo. É um corpo por ser munido das operações usuais, $+, \times$, que satisfazem as propriedades de estrutura de corpo; é ordenado pois $<$ satisfaz os axiomas de ordem; e finalmente é completo por satisfazer o axioma do supremo,

P_1 : “Todo subconjunto não vazio de R limitado superiormente tem supremo”.

Resultados significativos da Análise são fundamentados nesse axioma. Vejamos alguns desses resultados.

Inicialmente vejamos que o axioma do supremo garante ser R um corpo arquimediano, no seguinte sentido:

PA: $\forall a, b, 0 < a < b, \exists n \in N^* / na > b$, onde N^* é o conjunto dos números inteiros positivos ≤ 1 .

É só observar que se não existisse um $n \in N^*$ nessas condições então $na \leq b$ para todo $n \in N^*$. Assim, o conjunto $A = \{na / n \in N^*\}$ seria não vazio e limitado superiormente por b , logo, por P_1 , tem supremo. Seja $s = \sup A$. Então $na = (n+1)a - a \leq s - a$, o que implica $s - a$ ser cota superior de A e menor que s , o que é contradição.

Ainda, como consequência do axioma do supremo temos os seguintes resultados:

(a) R é um espaço métrico completo, com a métrica usual:

P_2 : “Toda seqüência de Cauchy é convergente”.

(b) Em R vale o Teorema dos Intervalos Encaixantes:

P_3 : Seja $I_n = [a_n, b_n]$, $a_n < b_n$, $n = 1, 2, \dots$, uma família de intervalos fechados e encaixados no seguinte sentido $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$. Então, existe pelo menos um número c que pertence a todos os intervalos I_n , ou seja, $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Se, além disso, a seqüência $l_n = b_n - a_n$

convergir para zero, então $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ contem um único ponto.

(c) As seqüências monótonas têm a seguinte propriedade:

P_4 : “Toda seqüência monótona crescente e limitada superiormente é convergente”.

Isso nos garante uma condição necessária e suficiente para uma seqüência monótona ser convergente.

A questão que vamos responder é: Se vale uma dessas propriedades acima, então pode-se concluir o axioma do supremo? Por exemplo: partindo da hipótese de R ser completo como espaço métrico, R é completo no sentido de valer o axioma do supremo? Se assumirmos que em R vale a propriedade arquimediana, PA, temos que a resposta é afirmativa.

O que faremos a seguir é assumirmos a propriedade arquimediana, PA, e provarmos que: $P_2 \Rightarrow P_1, P_3 \Rightarrow P_1, P_4 \Rightarrow P_1$.

Para isso observamos que se a propriedade arquimediana vale então a seqüência $\left(\frac{1}{2^n}\right)$ converge para zero. Com efeito: provemos que: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N^* / n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Vejamos isso em dois

casos: primeiramente se $0 < \varepsilon < 1$ e, em seguida, se $\varepsilon \geq 1$. Se $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) > 0$. Na propriedade arquimediana, PA, tomando $b = 1$ e $a = \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ no caso de $\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} < 1$ temos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}^* / n_0 \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} > 1$. Agora se $\frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \geq 1 \Rightarrow n_0 \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \geq n_0 \geq 1$. Portanto, se $0 < \varepsilon < 1$ temos que $\exists n_0 / n_0 \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} > 1$. Assim, $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \exists n_0 / n_0 \frac{\log 2}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} > 1 \Rightarrow \log 2^{n_0} > \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \Rightarrow 2^{n_0} > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon$. Se $n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon \Rightarrow 0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow \exists n_0 / n \geq n_0, \frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Agora, se $\varepsilon \geq 1$, claro que $\frac{1}{2^n} \leq \varepsilon, \forall n$. Podemos concluir que: $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}^* / n \geq n_0 \Rightarrow \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{1}{2^n}\right) \rightarrow 0$.

Provaremos inicialmente que $P_3 \Rightarrow P_1$.

Seja $C \subset \mathbb{R}$, $C \neq \emptyset$ e C limitado superiormente. Provemos que C tem supremo. Pois bem, tomemos $a_1 \in C$ e $b_1 \notin C$ com b_1 cota superior de C tal que $a_1 \leq b_1$ e $b_1 \notin C$. Isso é possível pois

$C \neq \emptyset$ e C é limitado superiormente. Seja $a = \frac{a_1 + b_1}{2}$ o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$. Claro que a determina dois intervalos: $[a_1, a]$ e $[a, b_1]$. Seja $I_2 = [a_2, b_2]$ aquele entre esses dois intervalos com a seguinte propriedade: a_2 é menor ou igual a algum elemento de C e $b_2 \notin C$ e b_2 é cota superior de C .

Veja que $|I_2| = b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}$. Prosseguindo assim, consideremos $I_n = [a_n, b_n]$ tal que

$|I_n| = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$, e mais a_n é menor ou igual a algum elemento de C e $b_n \notin C$ e b_n é cota superior de C .

Dessa forma, temos que $I_{n+1} \subset I_n$, $|I_n| \rightarrow 0$ pelo resultado anterior, I_n são fechados. Por P_3 temos que

existe um único c tal que $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Afirmação: $c = \sup C$. Para isso mostraremos que: i) c é cota superior de C e ii) c é a menor das cotas superiores. Vejamos inicialmente que c é cota superior de C .

Suponhamos que c não seja cota superior de C , então $\exists x \in C / x > c$. Pela construção dos intervalos I_n ,

temos que $c < x \leq b_n, \forall n$. Como $\{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ temos que $c \in I_n, \forall n$ então $c \geq a_n$. Assim:

$a_n \leq c < x \leq b_n$. Portanto $[c, x] \subset I_n, \forall n$. Como $x > c \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{c\}$ que é contradição. Assim c é cota superior de C .

Vejamos que c é a menor das cotas superiores. Suponhamos que c não seja a menor das cotas superiores de C . Então: $\exists \varepsilon > 0$ tal que $c - \varepsilon$ é cota superior de C . Mas à direita de a_n existe

$x \in C$. Logo $a_n \leq x \leq c - \varepsilon < c \leq b_n \Rightarrow [c - \varepsilon, c] \subset I_n, \forall n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{c\}$ que é contradição. Como queríamos demonstrar.

Vejam os a seguir que $P_2 \Rightarrow P_1$, sempre supondo que a propriedade arquimediana seja válida. Usando o resultado anteriormente aprovado basta provarmos que $P_2 \Rightarrow P_3$. Com efeito, Seja (I_n) uma seqüência de intervalos encaixantes, $I_n = [a_n, b_n], I_{n+1} \subset I_n, |I_n| \rightarrow 0$. Provemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$. Mostremos que (a_n) é uma seqüência de Cauchy. Com efeito, sabemos que $|I_n| \rightarrow 0$, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} / |b_n - a_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / n \geq n_0 \Rightarrow b_n - a_n < \varepsilon$. Se $m > n \geq n_0 \Rightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n \Rightarrow |a_n - a_m| \leq b_n - a_n < \varepsilon$. Portanto $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 / m > n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$. Assim, (a_n) é de Cauchy $\Rightarrow \exists c$ tal que $a_n \rightarrow c$ e mais, $a_n \leq c$. De forma análoga $|b_n - b_m| \leq |I_n| < \varepsilon, m > n > n_0 \Rightarrow (b_n)$ é de Cauchy $\Rightarrow \exists b / b_n \rightarrow 0$. Portanto $a_n \leq c \leq b \leq b_n, \forall n$. Assim, $[c, b] \subset I_n, \forall n$. Ou seja, $[c, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Portanto $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Se $|I_n| \rightarrow 0$, claro que $c = b$ e assim $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\} = \{b\}$. Portanto vale $P_3 \Rightarrow P_1$, ou ainda $P_2 \Rightarrow P_3 \Rightarrow P_1$, desde que a propriedade arquimediana seja válida.

Finalmente provemos que $P_4 \Rightarrow P_1$. Para isso basta provarmos que $P_4 \Rightarrow P_3$. Com efeito, seja $I_n = [a_n, b_n]$ uma seqüência de intervalos fechados e encaixantes: $I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$. Mostremos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Pois bem, temos que $a_1 \leq a_n \leq \dots \leq b_n \leq b_1$. Assim, (a_n) é limitada superiormente pois $a_n \leq b_1$. Logo, por hipótese, existe a tal que $a_n \rightarrow a$. Da mesma forma (b_n) é limitada inferiormente pois $b_n \geq a_1$ e mais (b_n) é decrescente. Por hipótese existe b tal que $b_n \rightarrow b$, e desde que $a_n \leq b_{n+1}$, então $a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq b_n \Rightarrow a_n \leq a \leq b \leq b_n \Rightarrow [a, b] \subset I_n, \forall n \Rightarrow [a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Claro que se $|I_n| = b_n - a_n \rightarrow 0$, então $a = b$. Portanto vale P_3 , como $P_3 \Rightarrow P_1$, então $P_4 \Rightarrow P_1$, desde que a propriedade arquimediana seja válida.

Lembramos que os axiomas de corpo ordenado juntos com a hipótese de que R é um espaço métrico completo não implicam no axioma do supremo. O que podemos afirmar é que existem corpos ordenados que são espaços métricos completos mas que não são corpos ordenados completos. Esses objetos não são facilmente encontrados.

Referências Bibliográficas

LIMA, L. Elon. **Análise real volume 1**. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.